

Б.М. Ляшенко, Д.О. Коваленко. Використання ЕОМ при вивченні методів Монте-Карло обчислення кратних визначених інтегралів

УДК 378.147.88:004

**Б.М. Ляшенко,**  
кандидат фізико-математичних наук, доцент;  
**Д.О. Коваленко,**  
учитель ЗОШ №21, студент  
(Житомирський педуніверситет)

## ВИКОРИСТАННЯ ЕОМ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТОДІВ МОНТЕ-КАРЛО ОБЧИСЛЕННЯ КРАТНИХ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

*Для вивчення та практичного використання методів Монте-Карло при обчисленні кратних визначених інтегралів розроблено відповідний ППП з розвинутим інтерфейсом.*

Основним методом наближеного обчислення визначених інтегралів традиційно вважають метод прямокутників та його різноманітні модифікації (метод трапецій, метод Сімпсона, формули Ньютона-Котеса) [1: 173-188; 2: 577-597]. Для одновимірних випадків ці методи дають цілком задовільні результати при порівняно невеликому обсягу обчислень. Але для випадків кратних інтегралів, коли підінтегральна функція є функцією багатьох змінних, кількість обчислень значно зростає [1: 247-251; 2: 627-632], а інколи навіть сучасні швидкодіючі ПЕОМ витрачають на ці обчислення надто багато часу.

Виходом у цій ситуації може бути використання альтернативних, недетермінованих чисельних методів, відомих як методи Монте-Карло [1: 261; 2: 634]. В основі їх лежить моделювання випадкових величин з подальшим аналізом їх розподілів, які після відповідних перетворень з певною точністю дають величину, шукану в процесі обчислення. Такі методи часто називають стохастичними, оскільки вони є апаратом теорії імовірностей та математичної статистики.

Першою роботою, в якій викладено й математично обґрунтовано один з методів Монте-Карло, прийнято вважати працю Холла (1873 р.) про наближене обчислення числа "π" за допомогою випадкових кидань голки на розкреслений паралельними лініями папір (задача Бюффона). Але загальна теорія методів Монте-Карло виникла лише тоді, коли Дж. фон Нейман, який у складі групи фізиків працював над створенням атомної бомби, у 1944 р. запропонував застосувати апарат теорії імовірностей для вирішення деяких задач нейтронної фізики. Саме тоді для моделювання випадкових величин уперше використали ЕОМ.

З розвитком загальної теорії методів Монте-Карло їх стали використовувати і в інших сферах. Наприклад, сьогодні методи Монте-Карло широко використовуються в теорії ігор, при розв'язуванні задач масового обслуговування та математичної економіки. Цьому сприяв також подальший розвиток комп'ютерної техніки.

Викладемо теоретичне обґрунтування алгоритму, який реалізує основну ідею методу Монте-Карло стосовно обчислення кратних інтегралів.

Обчислимо  $m$ -кратний інтеграл

$$I = \int \cdots \int_{(S)} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m \quad (1)$$

від неперервної функції  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  в обмеженій замкненій області  $S$ .

Геометрично значення інтегралу  $I$  є  $(m+1)$ -вимірним об'ємом прямого циліндроїда в просторі  $Ox_1 x_2 \dots x_m y$ , побудованого на основі  $S$  і обмеженого поверхнею  $y = f(\vec{x})$ , де  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Перетворимо інтеграл (1) так, щоб нова область інтегрування повністю містилася всередині одиничного  $m$ -вимірного куба. Для цього побудуємо  $m$ -вимірний паралелепіпед

$$a_i \leq x_i \leq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

який повністю містить область інтегрування  $S$ . Після заміни змінних  $x_i = a_i + (A_i - a_i)\xi_i$ ,  $m$ -вимірний паралелепіпед (2) перетвориться в  $m$ -вимірний одиничний куб  $0 \leq \xi_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , і, отже, нова область інтегрування  $\sigma$ , яка знаходиться за звичайними правилами, буде повністю розміщена всередині цього куба. Таким чином,

$$I = \int \cdots \int_{(\sigma)} F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_m, \text{ де}$$

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m) \times$$

$$\times f(a_1 + (A_1 - a_1)\xi_1, a_2 + (A_2 - a_2)\xi_2, \dots, a_m + (A_m - a_m)\xi_m).$$

Вибираємо  $m$  рівномірно розподілених на відрізку  $[0, 1]$  послідовностей випадкових чисел:

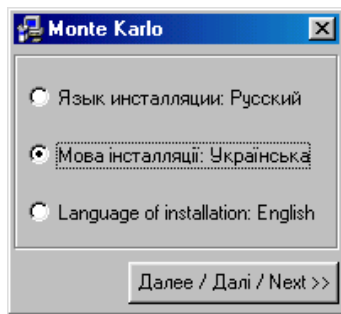
$$\begin{aligned} &\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \dots; \\ &\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}, \dots; \\ &\dots\dots\dots \\ &\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}, \dots \end{aligned}$$

Точки  $M_i(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)})$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  можна розглядати як випадкові. Вибираючи досить велику кількість  $N$  точок  $M_1, M_2, \dots, M_N$ , перевіряємо, які з них належать області  $\sigma$  і які не належать їй. Нехай  $M_i \in \sigma$  при  $i=1, 2, \dots, n$  і  $M_i \notin \sigma$  при  $i=n+1, n+2, \dots, N$  (для зручності ми тут змінюємо нумерацію точок).

Беручи достатньо велику кількість  $n$  точок  $M_i \in \sigma$ , наближено можна покласти  $y_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i)$ . Звідси

шуканий інтеграл виражається формулою  $I = y_{cp} \sigma \sum_{i=1}^n F(M_i)$ , де під  $\sigma$  розуміється  $m$ -вимірний об'єм області

інтегрування  $\sigma$ . Якщо обчислення об'єму затруднено, то можна покласти  $\sigma \approx \frac{n}{N}$ . Звідси  $I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n F(M_i)$ .



Для успішного використання непрограмуємими фахівцями методу Монте-Карло при обчисленні кратних інтегралів наведений алгоритм реалізований у вигляді відповідного пакету прикладних програм. Пропонований нами пакет "Монте-Карло" працює під управлінням операційних систем Windows 95/98/Me/2000/XP. Мінімальна апаратна конфігурація, потрібна для його роботи: Pentium 133МГц, 8Мб ОЗУ, VGA, 1Мб на жорсткому диску.

Цей пакет постачається користувачу у вигляді файлу інсталяції **install.exe**. На першому кроці інсталяції користувач має вибрати мову, якою програма інсталяції буде виводити на екран повідомлення та запити (рис.1).

Рис 1

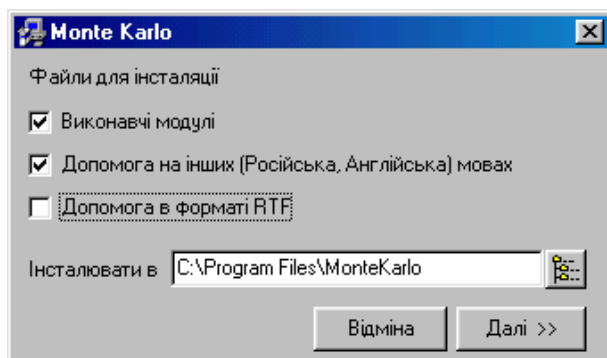


Рис 2

На наступному етапі користувач обирає директорію, в яку буде інстальований пакет "Монте-Карло" (стандартно це "C:\Program Files\MonteKarlo"), та файли, які необхідно встановити (рис. 2).

Програма інсталяції скопіює обрані файли в задану директорію і створить необхідні ярлики в меню "Пуск". Користувач може розпочинати роботу, не перезавантажуючи комп'ютер.

Пакет "Монте-Карло" має MDI-інтерфейс, що дозволяє обчислювати кілька інтегралів в одному сеансі одночасно – кожен інтеграл обчислюється у своєму власному вікні. Керувати вікнами можна за допомогою головного меню (рис. 3).

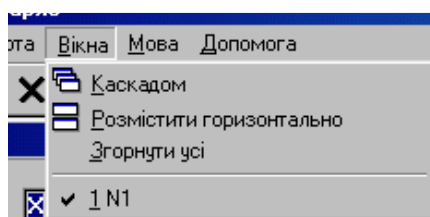


Рис 3

Для того, щоб розпочати обчислення, спочатку необхідно створити новий документ "Монте-Карло". Це можна зробити, вибравши пункт меню "Файл" \ "Створити". За допомогою інших пунктів меню "Файл" можна виконувати всі стандартні операції з документами: відкривати їх з диску, зберігати (в тому числі і під новим ім'ям), вийти з програми (рис. 4). Вищевказані пункти меню продубльовані також на панелі інструментів.

Після створення документа необхідно ввести у відповідні поля підінтегральну функцію. Функція вводиться у текстове поле (її формат повністю ідентичний формату математичних

виразів у мові BASIC [3:30]). Програма автоматично визначає кількість змінних у функції та пропонує ввести

межі інтегрування для кожної змінної. Користувач також повинен задати кількість випробувань. Чим більшою буде ця кількість, тим точніший результат буде отримано.

Щоб розпочати розрахунки, необхідно вибрати пункт меню "Робота" \ "Розпочати розрахунки" або скористатись відповідною кнопкою на панелі інструментів. За ходом обчислень індикатор прогресу показує відсоток змодельованих випробувань.

По закінченні розрахунків користувач одержує числовий результат обчислення заданого кратного визначеного інтеграла.

Пакет "Монте-Карло" має тримовний (російська, українська, англійська) інтерфейс та систему допомоги. Система допомоги викликається через відповідний пункт меню або кнопку на панелі

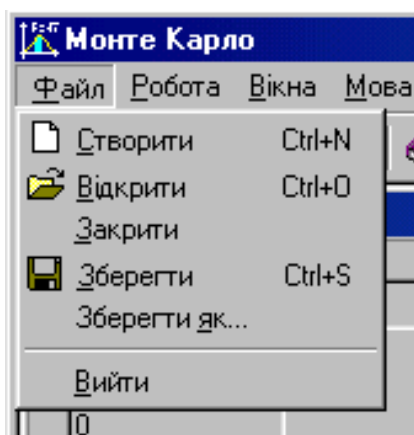


Рис. 4

керування і має класичний стиль Windows 95. В системі допомоги користувач може знайти докладну інформацію про те, як користуватися програмою, а також опис самого чисельного методу.

Пакет "Монте-Карло" пропонується використовувати для демонстрації процесу обчислення визначених інтегралів стохастичними методами на лабораторних практикумах з відповідної теми курсу "Чисельні методи" [4: 26].

#### **СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
3. Кетков Ю.Л. GW-, Turbo- и Quick BASIC для IBM PC. – М.: Финансы и статистика, 1992. – 240 с.
4. Програми для фізико-математичних факультетів педагогічних вузів. Збірник № 4. – К.: Республіканський учбово-методичний кабінет загальної середньої та педагогічної освіти, 1992. – 96 с.

Матеріал надійшов до редакції 22.11.02 р.

***Ляшенко Б.Н., Коваленко Д.О. Использование ЭВМ при изучении методов Монте-Карло вычисления кратных определенных интегралов.***

*Для изучения и практического использования методов Монте-Карло при вычислении кратных определенных интегралов разработан соответствующий ППП с развитым интерфейсом.*

***Lyashenko B.M., Kovalenko D.O. The Use of Computers for Mastering Monte-Carlo Methods of Calculating Multiple Definite Integrals.***

*The authors present a new application program package with a developed interface for mastering Monte-Carlo methods of calculating multiple definite integrals.*